
Exemples abstraits ou concrets ?

Apprendre les mathématiques à partir d'exemples abstraits ou concrets : la réponse d'une équipe de psychologues cognitives réfutée ?

Dirk De Bock*^o, Johan Deprez*[†], Wim Van Dooren[,] Michel Roelens***[,] Lieven Verschaffel****

* Hogeschool-Universiteit Brussel
 Faculteit Economie en Management
 Stormstraat 2
 B-1000 Brussel

Katholieke Universiteit Leuven, Specifieke Lerarenopleiding Wiskunde
^oKatholieke Universiteit Leuven, Faculteit Psychologie en Pedagogische Wetenschappen

[†]Universiteit Antwerpen, Instituut des Sciences de l'Enseignement et de l'Information

Dirk.Debock@hubrussel.be
Johan.Deprez@hubrussel.be

** Katholieke Universiteit Leuven
 Faculteit Psychologie en Pedagogische Wetenschappen
 Dekenstraat 2
 B-3000 Leuven

Wim.Vandooren@ppw.kuleuven.be
Lieven.Verschaffel@ppw.kuleuven.be

*** Katholieke Hogeschool Limburg
 Universitaire Campus
 Agoralaan Gebouw B, bus 4
 B-3590 Diepenbeek
 Maria-Boodschaplyceum Brussel
Michel.Roelens@ler.khlim.be

RÉSUMÉ. En 2008, Kaminski, Sloutsky et Heckler ont publié un article dans *Science*, intitulé « The advantage of abstract examples in learning math ». Cette publication a attiré beaucoup d'attention dans la presse. Des réactions plus critiques sont parues dans la littérature spécialisée en didactique des mathématiques. Dans cet article, nous donnerons un aperçu de ces réactions et nous y ajouterons quelques commentaires. Après cela, nous ferons part des résultats de notre propre recherche empirique qui, d'une part, confirme les résultats de Kaminski, mais qui, d'autre part, met en doute l'interprétation de ce que les élèves auraient réellement appris à partir des exemples abstraits.

MOTS-CLÉS : Kaminski, recherche empirique, exemples abstraits et concrets, transfert, concept de groupe, étudiants bacheliers

1. Introduction¹⁵

Dans le supplément scientifique du quotidien flamand *De Standaard* du 30 avril 2008, on a pu lire :

Gaat wiskunde op school over trainen die elkaar tegemoet rijden, leeglopende badkuipen, tennisballen, taartpunten pizza en zaaierende boeren? Of over abstracte vergelijkingen met x en y en breuken en kwadraten? En welk van die twee werkt het best? [S'agit-il, dans les mathématiques scolaires, de trains qui se rencontrent, de baignoires qui se vident, de balles de tennis, de morceaux de pizzas et de paysans qui sèment ? Ou s'agit-il plutôt d'équations avec des x et des y , de fractions et de nombres mis au carré ? Lequel de ces deux types de cours fonctionne le mieux ?]

La réponse est donnée dans le titre du même article : « Abstracte wiskunde leert beter dan praktische voorbeelden » [« L'apprentissage de mathématiques abstraites est plus aisé qu'à partir d'exemples pratiques »]. Des articles de même tendance sont parus également dans la presse étrangère, par exemple « Les exemples sont mauvais pour l'apprentissage des mathématiques » dans *Le Monde* et « Study suggests math teachers scrap balls and slices » dans *The New York Times*, tous deux du 25 avril 2008.

Ces articles étaient inspirés par la thèse de doctorat de la chercheuse J. A. Kaminski de l'Ohio State University (Kaminski, 2006). Les résultats de Kaminski et ses collaborateurs sont publiés dans des revues scientifiques diverses. Une publication dans la revue prestigieuse *Science* en avril 2008 (Kaminski, Sloutsky & Heckler, 2008) a été à l'origine de ces parutions dans la presse.

Kaminski et ses collaborateurs ont mis en doute la conviction largement répandue comme quoi l'apprentissage des maths se déroule du concret à l'abstrait. Ils se sont basés sur l'idée que l'apprenant doit accomplir un effort supplémentaire pour arriver à la structure mathématique lorsque celle-ci est 'cachée' sous des informations inutiles provenant d'un contexte concret (Kaminski, 2006) :

Instantiating an abstract concept in concrete contexts places the additional demand on the learner of ignoring irrelevant, salient superficial information, making the process of abstracting common structure more difficult than if a generic instantiation were considered (p. 114).

Kaminski et ses collaborateurs ont mené une série d'expériences contrôlées avec (principalement) des étudiants bacheliers en psychologie. Ils ont conclu que l'abstrait est plus favorable à l'apprentissage que le concret et ils ont émis l'hypothèse que ce résultat est généralisable (Kaminski et al., 2008) :

If the goal of teaching mathematics is to produce knowledge that students can apply to multiple situations, then representing mathematical concepts through generic instantiations, such as traditional symbolic notation, may be more effective than a series of 'good examples' (p. 455).

Moreover, because the concept used in this research involved basic mathematical principles and test questions both novel and complex, these findings could likely be generalized to other areas of mathematics. For example, solution strategies may be less likely to transfer from problems involving moving trains or changing water levels than from problems involving only variables and numbers (p. 455).

L'article dans *Science* n'a pas seulement attiré l'attention de la presse populaire, mais il a également provoqué plusieurs réactions critiques de collègues chercheurs. Dans cet article, nous avons incorporé des réactions de sources diverses : celles parues dans le *Educational Forum* de *Science* ou sous forme de lettre électronique sur le site de *Science* (Cutrona, 2008 ; Mourrat, 2008 ; Podolefsky & Finkelstein, 2009) ; un research commentary qui est paru dans le *Journal for Research in Mathematics Education* (Jones, 2009a, 2009b) et quelques réactions dans des médias moins formels (Deprez, 2008 ; McCallum, 2008).

2. L'étude de Kaminski et ses collaborateurs

Kaminski et al. (2008) rendent compte d'une série de quatre expériences. Nous nous concentrerons ici sur l'une d'elles, l'expérience de base de cette série. Quatre-vingts étudiants bacheliers en psychologie étaient impliqués dans cette expérience de base. Sa structuration globale est décrite dans la figure 1. Lors de la phase d'instruction, les sujets ont tout d'abord étudié un certain concept mathématique à l'aide d'un diaporama. Ceci s'est produit, selon la condition expérimentale, dans un contexte dénommé abstrait par Kaminski et al. (2008)

¹⁵ Ce texte est publié en accord avec la Revue Losanges : <http://www.sbpn.be/2010/12/losanges - 11/>

(condition A dans la figure 1) ou dans un ou plusieurs contextes qualifiés de concrets (conditions C1, C2 et C3). À la fin de la phase d'instruction, on a testé la compréhension du concept dans le même contexte que pendant la phase d'instruction. Immédiatement après cette première phase, il s'en est suivi une phase de transfert dans laquelle les sujets ont été soumis à un test dans lequel le concept étudié était appliqué à un autre contexte (identique pour tous les sujets).

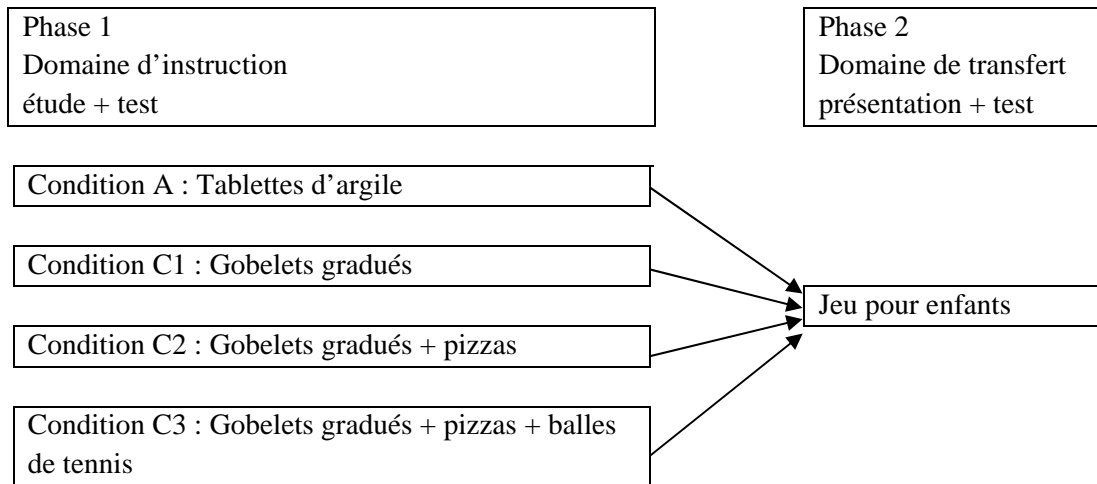


Figure 1. *Élaboration de l'expérience de base de Kaminski*

Le concept mathématique central dans l'étude de Kaminski, c'est celui d'un groupe commutatif d'ordre 3 : un système de calcul constitué d'un ensemble de 3 éléments (qui reprennent le rôle des nombres dans les systèmes de calcul habituels) et une opération avec ces éléments (qui reprend le rôle de l'addition ou de la multiplication dans les systèmes de calcul habituels) qui remplit certaines conditions (la commutativité, l'associativité, l'existence d'un élément neutre et d'un élément inverse pour chacun des trois éléments).

Dans la condition C1 (la lettre C fait allusion à 'concret', voir ci-dessous), le concept de groupe est enseigné dans le contexte des gobelets gradués remplis d'un tiers, de deux tiers ou entièrement (voir la deuxième ligne de la troisième colonne du tableau 1). Ce sont les trois éléments avec lesquels on calcule. L'opération avec ces éléments est définie de la façon suivante. Les gobelets gradués sont combinés en les rassemblant sans les faire déborder. Lorsque le résultat comporte plus d'un gobelet, on supprime les gobelets pleins. Un exemple est montré dans la figure 1.



Figure 1. *Exemple d'une combinaison de deux gobelets gradués*

Lors de la phase d'instruction, les étudiants ont bénéficié d'une introduction au contexte des gobelets gradués. Puis, les règles de calcul ont été illustrées par des exemples. Il y a trois règles générales, basées sur les propriétés de l'élément neutre, sur la commutativité et sur l'associativité (sans que ces termes ne soient utilisés). On retrouve ces règles dans la troisième ligne de la troisième colonne du tableau 1. De plus, il y a trois règles spécifiques, qui figurent dans la dernière ligne de la troisième colonne du tableau 1. Les sujets ont ensuite résolu quelques exercices en appliquant les règles. Après chaque exercice, on leur a montré la bonne solution et donné des explications sur la méthode de travail. Ensuite, il y avait quelques exemples plus complexes. Après un résumé des règles, les sujets ont passé un test d'apprentissage sous la forme de 24 questions à choix multiple dans le contexte des gobelets gradués.







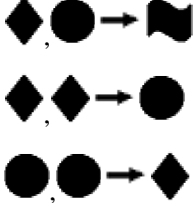
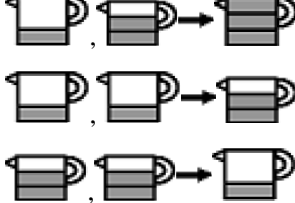
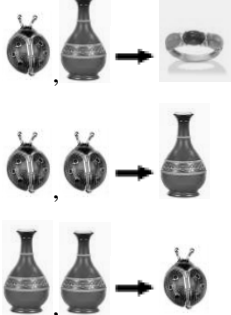
	<i>Tablettes d'argile</i>	<i>Gobelets gradués</i>	<i>Jeu pour enfants</i>
Éléments			
Règles générales	<p>Si un symbole est combiné avec , alors le résultat est l'autre symbole.</p> <p>L'ordre des symboles n'a pas d'importance pour le résultat.</p> <p>S'il y a plus de deux symboles, le choix des symboles que l'on combine d'abord n'a pas d'importance.</p>	<p>Si un symbole est combiné avec , alors le résultat est l'autre symbole.</p> <p>L'ordre des symboles n'a pas d'importance pour le résultat.</p> <p>S'il y a plus de deux symboles, le choix des symboles que l'on combine d'abord n'a pas d'importance.</p>	<p>Si un symbole est combiné avec , alors le résultat est l'autre symbole.</p> <p>L'ordre des symboles n'a pas d'importance pour le résultat.</p> <p>S'il y a plus de deux symboles, le choix des symboles que l'on combine d'abord n'a pas d'importance.</p>
Combinaisons spécifiques			

Tableau 1. Aperçu des contextes utilisés dans la phase d'instruction et dans la phase de transfert

Dans la condition A, on apprenait le même concept mathématique de groupe commutatif dans un contexte abstrait. Ici, les trois éléments utilisés dans les 'calculs' sont trois symboles dont on raconte qu'ils figurent sur des tablettes d'argile retrouvées sur un site archéologique (voir la deuxième ligne de la deuxième colonne dans le tableau 1). Ces tablettes contenaient des 'phrases' qui sont construites selon une structure fixe : d'abord une suite de symboles, puis une flèche et finalement un autre symbole. La figure 2 en est une illustration.



Figure 2. Exemple d'une 'phrase' sur une des tablettes d'argile

Le symbole qui succède à la flèche dépend de la série des symboles qui précède la flèche, selon des règles de calculs établies (il ne s'agit pas de calcul à proprement parler mais plutôt de 'règles de combinaison'). Alors que les règles de calcul dans la condition C1 découlaient de l'interprétation physique des éléments (les gobelets gradués) et des opérations effectuées avec ceux-ci (les rassembler sans les faire déborder), dans la condition A les règles de calcul sont totalement formelles et sans signification. Dans la colonne 2 du tableau 1 on peut voir qu'il s'agit, néanmoins, des mêmes règles.

À part le contexte, la phase d'instruction dans la condition A s'est déroulée exactement de la même manière que dans la condition C1.

Dans la terminologie de Kaminski, l'exemple de la condition A est un exemple abstrait (ou générique) parce qu'il contient le moins d'information superflue possible. En revanche, l'exemple de la condition C1 contient des éléments d'information qui n'appartiennent pas au concept mathématique de groupe commutatif au sens strict

(en raison de l'interprétation physique des symboles et de l'opération avec ceux-ci). C'est pourquoi Kaminski qualifie cet exemple de concret.

Il y a encore deux conditions concrètes supplémentaires dans la phase d'instruction. Dans la condition C2, les étudiants apprennent le concept mathématique de groupe commutatif dans deux contextes concrets : celui des gobelets gradués et un contexte très similaire avec des pizzas. Dans la condition C3, trois contextes étaient utilisés : les gobelets gradués, les pizzas et des balles de tennis. Dans la suite de l'article, nous n'utiliserons pas ces deux dernières conditions.

Le contexte de la phase de transfert, finalement, est le même pour tous les étudiants. Les trois éléments sont ici trois petites images qui jouent un rôle dans un jeu pour enfants (voir la deuxième ligne de la dernière colonne du tableau 1). Le jeu fonctionne ainsi : un des enfants du groupe est le joueur. D'abord, le groupe d'enfants montre successivement une série d'images. Puis, le joueur doit montrer de façon correcte une image qui correspond à cette série. La figure 3 nous en montre un exemple.



Figure 3. Exemple issu du jeu pour enfants

Les règles de la quatrième colonne du tableau 1 déterminent quelle image correspond à quelle série donnée d'images. Il s'agit à nouveau des mêmes règles que celles de la phase d'instruction.

Dans la deuxième phase, les sujets ont reçu une courte introduction concernant le jeu pour enfants. Les règles de la dernière colonne du tableau 1 n'ont pas été données, mais on a expliqué aux participants que les règles du jeu pour enfants sont identiques à celles du système qu'ils ont appris précédemment. Ensuite, on leur a présenté 12 exemples de combinaisons du jeu pour enfants. A partir de ces informations, les sujets peuvent déduire eux-mêmes les règles de la dernière colonne du tableau 1. Après cela, ils ont été soumis au test de transfert constitué de 24 questions à choix multiples dans le contexte du jeu pour enfants.

Examinons maintenant brièvement les résultats de l'expérience de base de Kaminski et ses collaborateurs. Tout d'abord, les quatre groupes ont obtenu des scores de même niveau au test d'apprentissage (valeur $p > 0.55$). Il n'y avait donc pas de différence quant à l'apprentissage. Par contre, les résultats au test de transfert ont montré des différences significatives : moyenne 76% (écart-type 21.6%) pour la condition A, 44% (16.0%) pour la condition C1, 44% (17.2%) pour la condition C2 en 51% (20.3%) pour la condition C3 ($p < 0.001$). En particulier, les résultats du groupe A au test de transfert étaient significativement meilleurs que ceux des groupes C1, C2 et C3. D'autres expériences de Kaminski et ses collaborateurs ont produit des résultats semblables. Ceci constitue la base de leurs conclusions, que nous avons mentionnées plus haut.

3. Critiques formulées à l'encontre de l'expérience de Kaminski

3.1. Une comparaison injuste

Afin de garantir qu'il n'y ait pas de différences indésirables dans la ressemblance entre les deux contextes de la phase d'instruction d'une part et de la phase de transfert d'autre part, Kaminski a invité une vingtaine d'étudiants bacheliers en psychologie à lire des descriptions des contextes des conditions C1 et du contexte du test de transfert. Du reste, ces étudiants n'avaient pas à approfondir les contextes. Ils devaient seulement indiquer sur une échelle le degré de ressemblance qu'ils percevaient entre les deux contextes. Les scores étaient bas (peu de ressemblance) et il n'y avait pas de différence significative entre les scores pour les conditions A et C1. Kaminski visait à contrôler ainsi ce qu'elle appelle la 'similitude superficielle'. Toutefois, un grand nombre d'auteurs (Cutrona, 2008 ; Deprez, 2008 ; Jones, 2009a, 2009b ; McCallum, 2008 ; Mourrat, 2008 ; Podolefsky & Finkelstein, 2009) ont argumenté qu'il y avait cependant des différences considérables dans la ressemblance à un niveau plus profond et que ces différences amènent à conclure que la comparaison dans les expériences de Kaminski est injuste. En particulier, des ressemblances entre le contexte de la condition A et celui du test de transfert, qui n'étaient pas présentes entre le contexte de la condition C1 et celui du test de transfert, font en sorte que les résultats étaient prévisibles.

Dans les conditions C, les symboles utilisés renvoient à une réalité physique et/ou à des éléments du monde des nombres. Les opérations avec ces symboles, elles-aussi, ont une interprétation physique ou numérique. Dans les conditions A de la phase d'apprentissage, par contre, les symboles sont arbitraires et les opérations n'ont aucune signification. Elles sont uniquement déterminées par des règles formelles. Dans le test de transfert, les

symboles utilisés et les opérations sont également privés de significations. Dans les conditions C, les sujets reçoivent le message implicite qu'ils peuvent utiliser leurs connaissances préalables, tandis que dans la condition A ils apprennent justement qu'ils ne peuvent pas en faire usage. Comme ils ne pouvaient faire aucun usage de leurs connaissances préalables, les sujets de la condition A étaient, en effet, mieux préparés.

Qu'il y ait une différence dans la relation avec la réalité est non seulement important en soi, mais en plus ceci a des conséquences en ce qui concerne le concept mathématique appris pendant la phase d'apprentissage. En effet, nous pensons que l'attention des sujets dans les conditions C ne se dirige pas en premier lieu vers le concept mathématique d'un groupe commutatif, qui est officiellement le thème central de l'expérience de Kaminski et ses collaborateurs. L'assemblage de gobelets et l'élimination des gobelets pleins comportent une référence forte à l'addition modulo 3. Nous soupçonnons même que ce concept mathématique communiqué de façon implicite l'emporte sur les règles communiquées de façon explicite (les règles d'un groupe commutatif). Les deux concepts sont importants en mathématiques, mais il s'agit de concepts différents : pour $n > 3$ et non-premier, il y a d'autres groupes que le groupe déterminé par l'addition modulo n . Et, ce qui est important pour l'expérience de Kaminski et ses collaborateurs, l'addition modulo 3 est peu utile dans le test de transfert.

Nous pouvons formuler l'idée précédente en termes de différence dans la structure mathématique. Dans la condition A de la phase d'apprentissage, la structure mathématique peut être décrite de la façon suivante. Un des éléments du groupe est l'élément neutre et les deux autres éléments jouent un rôle symétrique : additionnés à eux-mêmes ils donnent l'autre élément et additionnés entre eux ils donnent l'élément neutre. En notation symbolique, on a $\{n, a, b\}$ avec les relations suivantes :

$$a + a = b \text{ (1.1), } b + b = a \text{ (1.2) et } a + b = b + a = n \text{ (1.3).}$$

Le groupe est donc engendré par deux générateurs. Les relations (1.1-3) sont les règles du résumé que Kaminski a donné aux sujets à la fin de la phase d'instruction. Dans les conditions C de la phase d'instruction, les mêmes règles ont été données. D'un point de vue superficiel, la structure est la même. A travers le lien avec le monde physique ou le monde des nombres, une autre structure a été communiquée de façon implicite, dans laquelle la symétrie était brisée. En effet, les relations les plus en vue sont ici : $1 + 1 = 2$ et $1 + 1 + 1 = 3$. On obtient donc le groupe $\{n, a, b\}$ où

$$a + a = b \text{ (2.1) et } a + a + a = n \text{ (2.2).}$$

Cette structure alternative accentue le caractère cyclique du groupe, c'est-à-dire le fait qu'il est engendré par un seul de ses éléments. Les deux structures sont mathématiquement équivalentes (dans le cas d'ordre 3) : il est facile de démontrer que (2.2) est également valable dans le premier système et que (1.2) et (1.3) sont également valables dans le deuxième. La différence ne réside donc pas dans l'ensemble des règles valables, mais dans le choix des règles élues comme règles de base. Il est probable que les sujets se sont concentrés sur ces règles de base et qu'ils n'ont pas fait attention aux autres règles. On peut, par exemple, supposer que les sujets dans la condition A n'aient pas remarqué que la combinaison de trois fois le petit rond mène au drapeau. Ceci ne les a pas importunés lors du test de transfert, car les règles de base étaient les mêmes que dans la phase d'instruction dans la condition A. Inversement, les sujets des conditions C n'ont sans doute pas réalisé que le gobelet rempli à un tiers et le gobelet rempli à deux tiers jouaient un rôle symétrique. Toutefois, pour eux les conséquences étaient plus graves. Ceci peut expliquer pourquoi les sujets de la condition C ont eu des difficultés à reconnaître la structure mathématique dans le test de transfert. Nous constatons donc qu'il y avait de grandes différences entre les phases d'instruction A et C en ce qui concerne la structure mathématique sous-jacente, le concept mathématique qui a été appris et la possibilité de faire usage de connaissances préalables. Comme le test de transfert correspond beaucoup mieux à la phase d'instruction A, à tous ces points de vue, les sujets C étaient clairement désavantagés.

3.2. Transfert à un groupe d'ordre 4

Dans ce paragraphe, nous analyserons une expérience de la thèse de doctorat de Kaminski (2006, expérience 6) qui n'est pas rapportée dans *Science* (ni dans d'autres revues, pour autant que nous le sachions). Il s'agit de notre interprétation des résultats et non de celle de Kaminski.

Dans cette expérience de Kaminski il y avait un deuxième test de transfert. Dans ce test, les sujets ont fait la connaissance d'un système comprenant quatre symboles. On leur a dit que le nouveau système fonctionne comme le système à trois symboles qu'ils avaient appris dans la phase d'instruction. De plus, on leur a montré les exemples de combinaisons de la figure 5. Ces exemples suffisent pour connaître toutes les règles du nouveau système. Après cela, les sujets ont passé un test de 10 questions à choix multiples sur ce nouveau système.

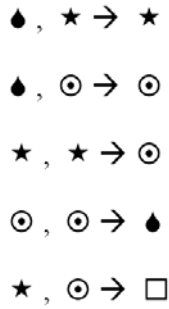


Figure 5. Exemples du deuxième domaine de transfert

Le lecteur peut vérifier que ce domaine de transfert est basé sur le groupe déterminé par l'addition modulo 4, avec la goutte comme élément neutre et l'étoile comme générateur.

Dans cette expérience, il y avait également plusieurs conditions pour la phase d'apprentissage. La première condition correspondait avec la condition A de l'expérience de base décrite au paragraphe 2, c'est-à-dire les tablettes d'argile. Les résultats de ces sujets au nouveau test de transfert n'étaient pas bons : statistiquement, ils n'étaient pas discernables de simples réponses aléatoires. Ce résultat démontre selon nous que le transfert à partir du domaine d'instruction A est quand même très limité ! A l'aide de l'analyse du paragraphe 3.1, nous pouvons soupçonner pourquoi : dans la phase d'instruction, les sujets n'avaient pas remarqué la relation (2.2) (voir le paragraphe 3.1), tandis que cette relation (dans une forme adaptée : avec 4 termes) est cruciale pour pouvoir remarquer la structure dans le deuxième test de transfert.

Dans la deuxième condition de cette expérience, on a également utilisé le contexte des tablettes d'argile, mais on a montré aux sujets, en plus, le *diagramme relationnel* de la figure 6.

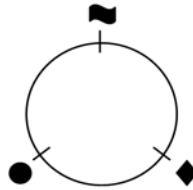


Figure 6. Diagramme relationnel de l'expérience 6 de Kaminski

Les sujets de cette condition ont bien réussi le test de transfert. Ici aussi, nous pouvons le comprendre à l'aide de l'analyse du paragraphe 3.1 : le diagramme est en fait une version géométrique de la relation (2.2) et il est vraisemblable que les sujets aient essayé de disposer les quatre éléments dans un diagramme circulaire comparable.

Dans une troisième et dernière condition, un exemple concret a été utilisé (une voiture qui roule sur un circuit, avec des drapeaux qui indiquent la distance) et complété par une 'représentation graphique' (voir la figure 7). (Nous ne nous attardons pas sur la distinction que fait Kaminski entre une telle représentation graphique et un diagramme relationnel.) Les sujets de cette condition, eux aussi, ont obtenu de bons résultats au deuxième test de transfert.) Ceci nous semble important car ça démontre qu'il y a également un transfert à partir d'un exemple concret.

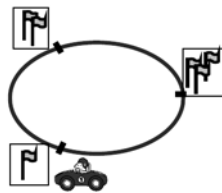


Figure 7. Représentation graphique de l'expérience 6 de Kaminski

Selon nous, cette expérience donne une autre impression que l'expérience décrite au paragraphe 2 sur laquelle les conclusions de Kaminski et ses collaborateurs dans *Science* sont basées : d'une part, cette expérience

dévoile des limites considérables du transfert à partir d'un exemple abstrait et d'autre part elle montre un cas de transfert réussi à partir d'un exemple concret.

3.3. *Qu'est-ce que les étudiants ont vraiment appris ?*

Kaminski et ses collaborateurs présupposent que les sujets ont effectivement appris le concept de groupe commutatif d'ordre 3. Toutefois, ceci est loin d'être évident. Dans leurs expériences, les tests étaient composés de questions à choix multiples. Ainsi, Kaminski et al. n'ont pas d'informations pour savoir comment les sujets ont trouvé la réponse et il est, de plus, difficile de savoir ce qu'ils ont réellement appris. Ont-ils vraiment appris les propriétés d'un groupe commutatif d'ordre 3 (la commutativité, l'associativité...) ? Ou ont-ils plutôt appris l'addition modulo 3 ? Ou ont-ils seulement appris à appliquer un ensemble de règles spécifiques ? Et lorsque les sujets appliquent les propriétés d'un groupe, le font-ils de façon consciente ? Car ces propriétés ont pour eux un caractère évident : ils sont habitués aux systèmes courants de calcul avec des nombres et, en outre, ils ne connaissent sans doute aucun système où ces règles n'ont pas cours.

3.4. *Quelques éléments supplémentaires de critique*

Les trois éléments de critique commentés en détails ci-dessus, ne sont pas les seuls que l'on retrouve dans les commentaires. Nous signalons encore deux critiques sans les développer en détails.

Le transfert dans l'expérience de base de Kaminski et ses collaborateurs possède quelques caractéristiques spécifiques (Jones, 2009a) :

- Le test de transfert est, tout compte fait, très rapproché de ce qui a été appris. Il s'agit donc de 'transfert proche'.
- Le test de transfert a eu lieu tout de suite après la phase d'apprentissage. Il s'agit donc de 'transfert immédiat' (contrairement à un transfert à long terme).
- Les sujets ont été prévenus que les règles du jeu pour enfants sont les mêmes que celles qu'ils ont apprises. Il ne s'agit donc pas de transfert spontané, mais de 'transfert provoqué'.

Sur chacun de ces points, le transfert dans les expériences de Kaminski s'écarte d'un transfert dans une situation d'enseignement réelle.

La deuxième critique est liée à la phase d'instruction concrète. Cette phase d'instruction est très éloignée d'un bon cours de mathématiques qui part du monde concret des élèves :

- Les contextes (que nous n'avons pas présentés ici de façon complète) sont très artificiels.
- Si on enseigne les mathématiques 'du concret à l'abstrait', il ne suffit pas de s'immobiliser dans des exemples concrets, mais il faut, à un moment voulu, se détacher des contextes et expliciter le noyau mathématique. Dans le 'cours' de Kaminski, cette phase de décontextualisation est totalement absente.
- Les règles d'un groupe commutatif d'ordre 3 ne sont pas utiles dans la phase d'instruction concrète. Nous voulons dire par cela qu'on peut parfaitement résoudre les exercices sans utiliser ces règles. Il suffit d'utiliser ses connaissances préalables. Il n'est donc pas étonnant que ces règles ne soient pas apprises.

4. A la recherche d'évidence empirique

Pour autant que nous le sachions, il n'y a pas eu de tentative à tester les critiques du paragraphe 3 de façon empirique. Ceci nous a inspirés à mettre sur pied une propre recherche empirique (De Bock, Deprez, Van Dooren, Roelens & Verschaffel, 2010).

4.1. *Conception et objet de l'étude*

Un groupe de 130 étudiants bacheliers en pédagogie à la K.U.Leuven a participé à la recherche, qui était composée de deux phases : (1) une phase d'instruction suivi d'un test de clôture et (2) un test de transfert. Tous les participants étaient répartis, de façon aléatoire, dans une des quatre conditions, notamment AA, AC, CA et CC, où la première lettre désigne la phase d'instruction et la deuxième le test de transfert, qui étaient abstraits (A) ou concrets (C). Les conditions AA et CA sont celles utilisées aussi par Kaminski et al. (2008) ; les conditions AC et CC ont été ajoutées par nous afin de mesurer le transfert vers un nouveau contexte concret. C'est un premier point de divergence avec l'expérience de base de Kaminski. Pour l'élaboration concrète des

phases d'instruction et de transfert A, nous avons utilisé, respectivement, le contexte des tablettes d'argile et celui du jeu fictif pour enfants (comme dans l'expérience de base de Kaminski). La phase d'instruction C a également été empruntée à l'expérience de base de Kaminski : la combinaison de gobelets qui étaient remplis d'un tiers, de deux tiers ou entièrement. Dans la phase C de transfert, nous avons demandé aux participants de combiner des morceaux de pizza qui étaient 'brûlés' d'un tiers, de deux tiers ou entièrement, de la même façon que les gobelets gradués (par exemple, deux tiers d'une pizza combinée avec deux tiers d'une pizza donne un tiers d'une pizza). Ce contexte est également présent dans la recherche de Kaminski, mais comme un des domaines d'instruction (et non comme domaine de transfert). Avant de faire passer le test à la fin de la phase d'instruction, nous avons encore présenté un aperçu des idées clés (dans le style « qu'avons-nous appris aujourd'hui ? »). Ceci s'est fait en phrases mais aussi illustré par un schéma. Plus concrètement, cet aperçu contenait les combinaisons spécifiques et les axiomes d'un groupe commutatif, par exemple « l'ordre n'est pas important » ou « si on combine un drapeau (= élément neutre dans l'instruction A) avec un autre symbole, on obtient toujours l'autre symbole ». Le test final de la phase d'instruction ainsi que le test de transfert étaient composés de 24 questions 'isomorphes' à choix multiples. Pour le reste, les tests d'instruction et de transfert étaient comparables dans les quatre conditions expérimentales.

Une deuxième différence avec la procédure de Kaminski et al. était l'insertion, tout de suite après la phase d'instruction (et donc avant la phase de transfert), d'une question ouverte. Les sujets devaient motiver le plus précisément possible leur réponse à cette question (voir la figure 8). Tant l'instruction que les tests se sont déroulés individuellement devant un écran d'ordinateur, sans intervalle de temps entre les deux phases. Les sujets pouvaient travailler à leur propre rythme et leur réponses, tant aux questions à choix multiples qu'à la question ouverte, ont été enregistrées de façon digitale. Après élimination des cas aberrants selon une même procédure que chez Kaminski, les scores aux tests d'instruction et de transfert, ont été analysés à l'aide d'une analyse des variances et de comparaisons partielles post hoc.

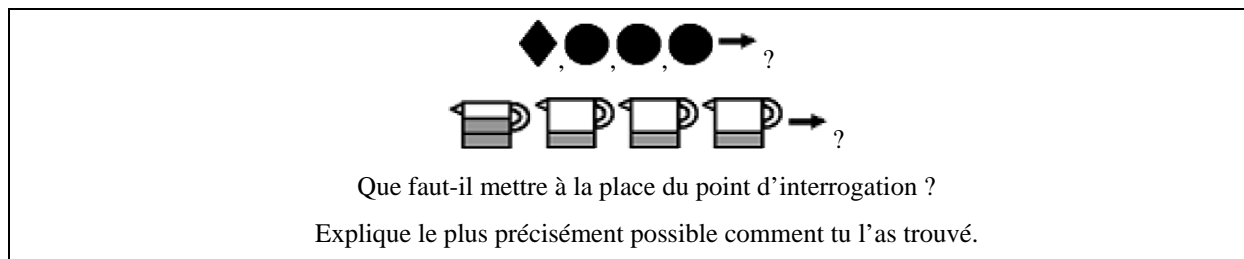


Figure 8. Question ouverte après la phase d'instruction A (première ligne) et C (deuxième ligne)

Pour l'analyse des explications concernant la réponse à la question ouverte, nous avons développé un système de scores (voir le tableau 2). Chaque explication d'un participant a été placée dans une ou plusieurs (sous-)catégories du système. Un score de 2 a été attribué pour une explication 'à un niveau général' (même si elle était formulée de façon 'maladroite'). Pour les conditions A, il s'agissait par exemple d'explications comme « Si on combine un drapeau avec un autre symbole, on a toujours l'autre symbole » (le rôle de l'élément neutre) ou « l'ordre n'a pas d'importance » (la commutativité). Pour les conditions C, il s'agissait d'explications en termes de 'calcul modulo 3', indépendantes du contexte concret des gobelets que l'on rassemble (par exemple « $2 + 2 = 4 - 3 = 1$ »). Un score de 1 a été attribué lorsque la règle était appliquée correctement dans au moins une étape du raisonnement, sans que cette règle ne soit formulée à un niveau plus général. Deux correcteurs indépendants ont appliqué ce système à toutes les explications et ils n'ont indiqué que quelques cas pour lesquels ils hésitaient. Après avoir comparé ces cas avec les descriptions détaillées du système des scores, tous les correcteurs étaient d'accord.

Catégorie	Description	Sous-catégorie	Score
-----------	-------------	----------------	-------

G (Groupe)	Application des axiomes d'un groupe commutatif, formulés de façon formelle ou informelle	G_1 : associativité	2 : Formulation à un niveau général
		G_2 : rôle de l'élément neutre	1 : application non-ambiguë
		G_3 : rôle des éléments inverses	0 : autrement
		G_4 : commutativité	
M (Modulo)	Application des propriétés du calcul modulo 3, formulées de façon formelle ou informelle	M_1 : avec des nombres entiers	2 : formulation à un niveau général
		M_2 : avec des fractions	1 : application non-ambiguë
			0 : autrement
R (Règles)	Répétition (presque) littérale d'une ou plusieurs règle(s) de combinaison		1 : oui 0 : non
N (Non)	Pas d'explication ou aucune explication pertinente ou compréhensible		1 : oui 0 : non

Tableau 2. Aperçu schématique du système des scores

4.2. Résultats

Le tableau 3 donne un aperçu des moyennes et des écarts types correspondants pour le test d'instruction et de transfert. Au test d'instruction, le groupe AC a moins bien réussi que le groupe CA (valeur- $p = 0.004$) et que le groupe CC ($p = 0,010$). Au test de transfert, le groupe CA a moins bien réussi que tous les autres groupes ($p < 0.001$ pour toutes les comparaisons) et le score du groupe AC était inférieur à celui du groupe CC ($p = 0.044$). Ces nouveaux résultats confirment ceux de Kaminski et al. (2008) pour ce qui concerne les deux conditions qui figurent également dans leur expérience de base : les prestations de groupe AA sont meilleures que celles du groupe CA pour le test de transfert. Donc, si l'on ambitionne un transfert vers un nouveau contexte *abstrait*, il est préférable d'aborder le sujet de façon abstraite que de façon concrète, comme l'avait déjà démontré Kaminski. Mais l'inverse se révèle également valable ! Le fait que le groupe CC réussit mieux que le groupe AC pour le test de transfert concret, démontre que le transfert vers un nouveau contexte *concret* est favorisé par un contexte d'instruction concret plutôt que par un contexte d'instruction abstrait. Remarquons aussi que, quoique le score du groupe AC au test d'instruction soit plus bas comparé aux deux groupes instruits de façon concrète, le score de transfert du groupe AC ne diffère pas de façon significative de celui du groupe AA. Ce résultat suggère que les étudiants instruits par un contexte abstrait peuvent en quelque sorte s'apprendre eux-mêmes l'addition modulo 3, comme représentation concrète d'un groupe d'ordre 3.

Condition	Moyenne et écart type des scores (Max = 24)	
	Test d'apprentissage	Test de transfert
AA ($N = 23$)	17,1 (3,9)	18,1 (3,8)
AC ($N = 30$)	15,3 (3,5)	17,4 (4,2)
CA ($N = 28$)	18,5 (2,9)	12,0 (4,3)
CC ($N = 24$)	18,3 (3,5)	20,2 (2,4)

Tableau 3. Moyennes et écarts types (entre parenthèses) des scores aux tests d'apprentissage et de transfert¹⁶

Le tableau 4 montre comment les explications des étudiants concernant leur réponse à la question ouverte ont été placées dans les différentes (sous)catégories du système des scores.

Domaine d'instruction	Score	G				M		R	N
		G ₁	G ₂	G ₃	G ₄	M ₁	M ₂		
A (N = 66)	2	0	6	0	0	0	0	–	–
	1	16	43	0	3	0	0	62	11
	0	50	17	66	63	66	66	4	55
C (N = 52)	2	0	0	0	0	7	0	–	–
	1	13	7	0	2	22	5	5	14
	0	39	45	52	50	23	47	47	38

Tableau 4. Répartition des explications dans le système des scores¹⁷

À partir des explications concernant la question ouverte de la phase d'instruction A, on ne constate en tout cas pas que les participants aient appris le concept de groupe commutatif. Malgré le fait qu'on ait demandé aux participants de motiver leur réponse *le plus précisément possible* et malgré le fait que les propriétés d'un groupe (l'associativité, la commutativité, l'existence d'un élément neutre et d'éléments symétriques) aient été formulées pendant la phase d'instruction, le rôle de l'élément neutre n'est mentionné de façon générale que par 6 des 66 étudiants. Ceci ne signifie pas que certains étudiants n'appliquent pas ces propriétés de façon spontanée et peut-être inconsciente : l'associativité, la commutativité et le rôle de l'élément neutre sont appliqués par respectivement 16, 3 et 43 élèves. La haute fréquence du rôle de l'élément neutre n'est pas étonnante car ce rôle peut aussi être considéré comme une simple règle de combinaison (et il a aussi été compté comme telle une seconde fois). En ce qui concerne les propriétés associatives et commutatives, on peut se demander si les participants ont 'appris' ces propriétés dans la phase d'instruction ou s'ils l'ont généralisée spontanément à partir de leur expérience avec le calcul numérique usuel. Ce que démontrent ces résultats qualitatifs en premier lieu, c'est que la plupart des participants ont (uniquement) appris à appliquer des règles de combinaison sur des symboles arbitraires : 62 des 66 participants répètent (presque) littéralement une des règles de combinaison pour motiver leur réponse à la question ouverte.

Les motivations données par les participants concernant leur réponse à la question ouverte après la phase d'instruction C démontrent qu'environ la moitié des participants avaient assimilé les règles du calcul modulo 3, soit par des nombres entiers (22/52), soit par des fractions (5/52). Malgré le fait que la phase d'instruction ne visait pas le calcul modulo 3 et ne contenait pas d'indices dans cette direction, 7 participants ont formulé ces règles sans se référer au contexte des gobelets gradués (par exemple, « $(2+1+1+1)/3 \rightarrow 1$ reste 2 » ou « $2+1+1+1=5$ et $5-3=2$ »). Les répétitions pures et simples de règles de combinaison apprises étaient rares après la phase d'instruction C (5/52). Tout comme après la phase d'instruction A, certains étudiants ont utilisé spontanément la propriété de l'élément neutre (7/52), l'associativité (13/52) ou la commutativité (2/52). En comparaison avec la phase d'instruction A, on remarque que le rôle de l'élément neutre est moins souvent mentionné, probablement parce qu'il était 'auto-évident' dans ce contexte (et n'était donc plus considéré comme règle de combinaison). Les fréquences relatives de l'associativité et de la commutativité sont environ égales, indépendamment du domaine d'instruction. Ceci est probablement une conséquence du caractère 'naturel' de ces propriétés ou de la familiarité des participants avec ces propriétés de par leurs expériences de calcul préalables.

¹⁶ La première lettre de la condition désigne la phase d'instruction et la deuxième la phase de transfert, qui étaient abstraits (A) ou concrets (C).

¹⁷ Pour les abréviations utilisées: voir le tableau 2.

4.3. Conclusion

Nos résultats confirment les constats de base de Kaminski et al. (2008) : le transfert vers un nouveau contexte abstrait est favorisé par un contexte d’instruction abstrait plutôt que par un contexte d’instruction concret. Néanmoins, par une extension du projet, nous avons pu démontrer que ceci n’est qu’un côté de la médaille : le transfert vers un nouveau contexte concret est également favorisé par un contexte d’instruction concret plutôt que par un contexte d’instruction abstrait. De plus, une analyse qualitative des motivations des participants concernant leur réponse à la question ouverte a démontré que par la phase d’instruction abstraite ils ont appris comment appliquer des règles formelles de combinaison à des symboles dépourvus de sens, mais qu’ils n’ont pas, pour autant, appris l’essentiel du concept mathématique de groupe.

5. Considérations finales

Nous sommes d’accord avec Jones (2009a, 2009b) que les résultats de Kaminski et al. (2008) – tout comme nos propres résultats – ne sont pas généralisables à l’ensemble de l’enseignement des mathématiques. Le thème de la recherche – le groupe (commutatif) d’ordre 3 – est étroit et les ‘exemples’ qu’utilise Kaminski pour rendre ce thème ‘concret’ sont très artificiels et bien loin de ce que des enseignants entendent par « enseigner un concept abstrait par des exemples concrets ». De plus, les expériences de Kaminski sont des expériences de laboratoire à courte échéance, qui diffèrent à plusieurs points de vue de situations de classe usuelles et dont l’effet à long terme n’a pas été étudié.

‘Comprendre’ le concept d’un groupe (abstrait) a également une portée épistémologique : d’où vient cette structure abstraite (avec précisément ces quatre axiomes) et où réside sa puissance ? Ni les exemples concrets ni les exemples abstraits de Kaminski n’éclairent cette question fondamentale. Tout comme le concept de dérivée dans l’enseignement secondaire est souvent introduit à travers un contexte cinématique, lié aux sources d’inspiration historiques de ce concept (la cinématique de Newton), ainsi sans doute une introduction significative du concept de groupe est possible (dans certaines sections, surtout de l’enseignement supérieur). Pour une première ébauche, où le concept de groupe est préparé au niveau secondaire à l’aide de groupes de symétrie de figures planes et surtout de figures solides, nous renvoyons à Roelens (2004, 2005).

Nous concluons avec une question plus spécifique sur la possibilité de généraliser les résultats de Kaminski (2006). Même si Kaminski a démontré que pour un concept mathématique donné une certaine façon d’instruire amène à un meilleur transfert qu’une autre, la question est de savoir quelles en sont les conséquences pour l’apprentissage de concepts similaires (ou plus avancés). On pourrait penser, en ce qui concerne le concept qui était mis sur le tapis, aux groupes cycliques d’ordre 4 ou plus (Deprez, De Bock, Roelens & Verschaffel, 2010). Et de façon plus générale, est-il possible de développer un environnement d’instruction ‘abstrait’, dans le style de Kaminski, pour les groupes cycliques d’ordre 4 ou plus ? En analysant tout simplement les relations requises, on peut en douter. Pour le groupe cyclique d’ordre trois, il faut trois ‘règles de combinaison spécifiques’. (Nous entendons par là les règles requises, en plus des axiomes de groupe et de la commutativité, pour déterminer complètement le (tableau de Cayley du) groupe.) Pour les groupes cycliques d’ordre 4, 5, 6, 7... il faudrait 6, 10, 15, 21... règles spécifiques (nous invitons le lecteur à le vérifier, par exemple à l’aide du tableau de Cayley). Puisque les participants dans la condition A se sont basés surtout sur les règles de combinaison, il est évident que les prestations des ‘apprentis abstraits’ diminueraient bien vite si l’on essayait d’appliquer la façon d’instruire de Kaminski aux groupes cycliques d’ordre supérieur. Pour travailler avec des groupes d’ordre supérieur, on a besoin de plus de ‘structure’ (et on n’y arrive plus avec un ensemble de règles formelles de combinaison). On peut donc affirmer que pour les groupes cycliques d’ordre 4 ou plus il ne serait pas évident du tout de développer un environnement d’apprentissage ‘abstrait’ fructueux – dans le style de Kaminski !

Bibliographie

- Cutrona, L. J. (2008). “Concrete” examples a fraction too abstract [Letter]. *Science*, 322, 1632. Retrieved August 29, 2009, from <http://www.sciencemag.org/cgi/content/summary/320/5875/454>
- De Bock, D., Deprez, J., Van Dooren, W., Roelens, M. & Verschaffel, L. (2010). Abstract or concrete examples in learning math? A replication and elaboration of Kaminski et al.’s study. In M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 297–304). Belo Horizonte, Brazil: Universidade Federal de Minas Gerais.
- Deprez, J. (2008). Concrete or abstract? *Uitwiskeling*, 24(4), 63–69.
- Deprez, J., De Bock, D., Roelens, M. & Verschaffel, L. (2010). Do abstract examples really have advantages in learning math? In M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the*

- Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 305–312). Belo Horizonte, Brazil: Universidade Federal de Minas Gerais.
- Jones, M. G. (2009a). Transfer, abstraction, and context. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40, 80–89.
- Jones, M. G. (2009b). Examining surface features in context. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40, 94–96.
- Kaminski, J. A. (2006). The effects of concreteness on learning, transfer, and representation of mathematical concepts. (Doctoral dissertation, Ohio State University, 2006). *Dissertation Abstracts International*, 67, 2500A.
- Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M. & Heckler, A. F. (2008). The advantage of abstract examples in learning math. *Science*, 320, 454–455.
- McCallum, W. (2008). *Commentary on Kaminski et al.*, The advantage of abstract examples in learning math, *Science*, April 2008. Retrieved August 29, 2009, from http://math.arizona.edu/~wmc/Research/Kaminsky_et_al_commentary.pdf
- Mourrat J.-C. (2008). Testing the limits of “concrete” and “generic” [Letter]. *Science*, 322, 1632. Retrieved December 17, 2008, from <http://www.sciencemag.org/cgi/content/summary/320/5875/454>
- Podolefsky, N. S. & Finkelstein, N. D. (2009, février). Counterexamples and concerns regarding the use of abstract examples in learning math [Letter]. Retrieved August 29, 2009, from <http://www.sciencemag.org/cgi/eletters/320/5875/454#11970>
- Roelens, M. (2004). Symmetrische figuren. *Uitwiskeling*, 20(2), 19–24.
- Roelens, M. (2005, été). *Comparing symmetry of figures and solids. From tangible geometry activities to group theory*, [Conférence non-publiée au colloque international “Mathematical Learning from Childhood to Adulthood”, Mons].
-